

# מתמטיקה מורחב

פרק 16 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות. .... 1
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות. .... 3
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית. .... 4
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים. .... 5
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות. .... 8

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

|                                            |                                                                |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$              | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$               |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$             | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$              |
| $\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$       | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$        |
| $\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$        | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$         |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$  | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$  |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$ |

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

- (1)  $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$
- (2)  $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$
- (3)  $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$
- (4)  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$
- (5)  $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$
- (6)  $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$
- (7)  $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$
- (8)  $\int \tan^2 x dx$
- (9)  $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$
- (10)  $\int \sin 7x \cos 5x dx$
- (11)  $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$
- (12)  $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$
- (13)  $\int \cos^2 x dx$
- (14)  $\int \sin^2 4x dx$
- (15)  $\int \cos^3 x dx$
- (16)  $\int \sin^3 4x dx$
- (17)  $\int \cos^4 x dx$
- (18)  $\int \sin^4 4x dx$
- (19)  $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$
- (20)  $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$
- (21)  $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$
- (22)  $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$
- (23)  $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$
- (24)  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\cos 2x - 12\sin \frac{x}{3} + c \quad (1) \\ & -10\cot 10x + c \quad (3) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (5) \\ & -\frac{1}{16}\cos 4x + c \quad (7) \\ & \tan x - \cot x + c \quad (9) \\ & \sin x + c \quad (11) \\ & \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13) \\ & \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + c \quad (15) \\ & \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (17) \\ & -\cot x - x + c \quad (19) \\ & \ln|\cos x| + c \quad (21) \\ & 3x + \frac{1}{2}\sin 2x - 2\sin x + c \quad (23) \\ & \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{24}\sin 6x\right) + c \quad (24) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \frac{1}{4}\tan 4x + c \quad (2) \\ & \frac{1}{2}\sin 2x + c \quad (4) \\ & x - \frac{1}{2}\cos 2x + c \quad (6) \\ & \tan x - x + c \quad (8) \\ & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c \quad (10) \\ & \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + c \quad (12) \\ & \frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14) \\ & -\frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 12x + c \quad (16) \\ & \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{128}\sin 16x + c \quad (18) \\ & 2\sin x + c \quad (20) \\ & -\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + c \quad (22) \end{aligned}$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ x = \arcsin t \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ x = \arccos t \end{array} \right.$$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right|$$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left( \frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left( \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[ \ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

## חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x + 2 \sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ ,

בתחום  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ .



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .

(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $y = \sin x + x$ , בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2\pi$ ,

ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט,  $S_1$  ו- $S_2$ , שווים.





- 4 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \cos^2 x$  ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.  
 השתמשו בזהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



- 5 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .  
 א. מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיימות  $f'(x) = 0$  בתחום  $0 < x < 2\pi$ .  
 ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$ , אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- $x$ .  
 ב. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6 נתונה הפונקציה  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$ .  
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא  $y' = x^2 \sin x$ .  
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \sin x$  בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

- 7 נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , כאשר  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $y = x + 2$  ב.  $\pi$  יח"ש.
- (1) א.  $y = 1$  ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$
- (2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.  
 ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$
- (3) א.  $(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$  ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$
- (4) א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  ב.  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$  ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.
- (5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$
- (6)  $b = -2, a = 2$

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$